ШИФР (не заполнять)
012469

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области «ОРМО»

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

Олимпиадная работа по математике (указать предмет) вариант 1

Выполнил (а)

Фамилия: НЕСТЕРЕНКО

Имя: ВАЛЕРИЯ

Отчество: ВИТАЛЬЕВНА

Класс: 11„Л"

Наименование школы: МБОУ Технический лицей № 176

Город (село): Карасук

Область: Новосибирская область

Площадка проведения: г. Карасук

Сирота: нет (указать да/нет) Инвалид: нет (указать да/нет, если да, указать вид: зрение, слух, опорно-двигательный аппарат) –

Дата рождения: 26 / 02 / 2000

Контактный телефон: +79137626969

E-mail: valerie2602000@gmail.com

vk.com/ valerianstr

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e-mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись

ШИФР 012469

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

1	2	3	4	5	Σ
7	8	8	5	–	28

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри

№1.

$$f(x) = \frac{x^2+3x-13}{x-1}.$$

Разделим числитель на знаменатель, выделим целую часть;

$$\begin{array}{r|l} x^2+3x-13 & x-1 \\ \hline -\ x^2-x & x+4 \\ \hline 4x-13 & \\ -\ 4x-4 & \\ \hline -9 & \end{array}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{(x+4)(x-1)-9}{x-1} =$$

$$= (x+4) - \frac{9}{x-1}.$$

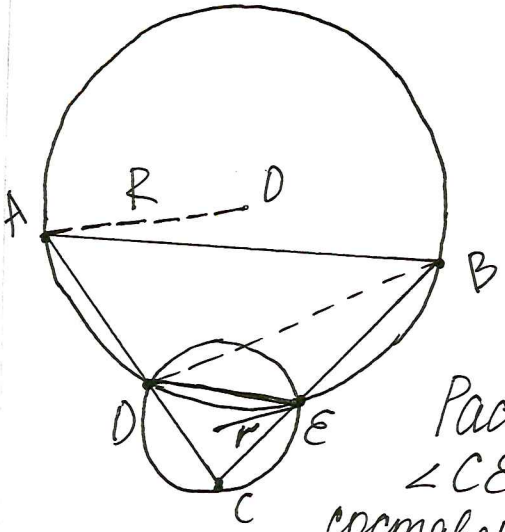
Чтобы $f(x)$ принимала целые значения при целочисленном значении x, необходимо, чтобы дробь $\frac{9}{x-1} \vdots 9 \Rightarrow \boxed{(x-1) \vdots 9}$.

Цифры, кратные 9: 1, 3, 9; их отрицательные значения: −1, −3, −9;

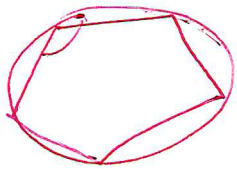
$$\left[\begin{array}{l} x-1=1 \\ x-1=-1 \\ x-1=3 \\ x-1=-3 \\ x-1=9 \\ x-1=-9 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=0 \\ x=4 \\ x=-2 \\ x=10 \\ x=-8 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 6-9=-3 \text{ — наименьшее целое} \\ 4+9=13 \\ 8-3=5 \\ 2+3=5 \\ 14-1=13 \\ -4+1=-3 \text{ — наименьшее целое.} \end{array}\right.$$

Ответ. −8; 2.

№4. Чистовик



Дано:
$AO = R = 4$
$BD = 5$
$CD = 2$
Найти: r - ?



Решение:

Рассмотрим $\triangle CDE$, а именно $\angle CED$, который в сумме с $\angle DEB$ составляет $180°$. (Смеж. углы) V

Рассмотрим многоугольник DABE. По условию, все его вершины лежат на окружности. Следовательно, по теореме о многоугольнике, вписанном в окружность, сумма его противоположных углов равна $180°$. ?

$\angle DAB + \angle AEB = 180°$; $\angle ADE + \angle EBA = 180°$ V

$\angle CED = \angle DAB \Rightarrow \boxed{\sin\angle CED = \sin\angle DAB}$

$$\frac{DB}{\sin\angle DAB} = \frac{2R}{1}$$ (Теорема синусов для окр-ти с $R=4$ и $\triangle ADB$)

$$\sin\angle DAB = \frac{DB}{2R} = \frac{5}{2\cdot 4} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{CD}{\sin\angle CDE} = 2r$$ (Теорема синусов для окр-ти с r и $\triangle DCE$)

$$r = \frac{CD}{2\sin\angle CDE} = \frac{2}{2\cdot\frac{5}{8}} = \frac{16}{10} = 1{,}6$$

Ответ. 1,6.

№3.

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) = \cos 2x - \cos\frac{\pi}{8}$$

Шаг 1. Преобразуем левую часть уравнения с помощью формулы синуса двойного угла.

$$2\sin\left(x - \frac{\pi}{16}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{16}\right) = \cos 2x - \cos\frac{\pi}{8}$$

№5. (Продолжение) чистовик.

Шаг 2. Представим правую часть уравнения в виде произведения с помощью формул.

$$\cancel{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{16}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{16}\right)=-\cancel{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{16}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{16}\right)$$

Шаг 3. Перенесём всё в левую часть, разложим на множители;

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{16}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{16}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{16}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{16}\right)=0$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{16}\right)\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{16}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{16}\right)\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\left(x-\frac{\pi}{16}\right)=0\\ \cos\left(x-\frac{\pi}{16}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{16}\right)=0\end{array}\right.$$

Шаг 4. Найдем корни уравнения.

1) $\sin\left(x-\frac{\pi}{16}\right)=0$

$x-\frac{\pi}{16}=\pi k,\ k\in z$

$x=\frac{\pi}{16}+\pi k,\ k\in z$

2) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x+\frac{\pi}{16}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{16}\right)=0$ – Используем ф-лы приведения.

$\sin\left(\frac{9\pi}{16}-x\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{16}\right)=0$ черн-к?

Преобразуем сумму в произведение;

$$2\sin\frac{\frac{9\pi}{16}-\cancel{x}+\cancel{x}+\frac{\pi}{16}}{2}\cdot\cos\frac{\frac{9\pi}{16}-x-x-\frac{\pi}{16}}{2}=0$$

$$2\sin\frac{10\pi}{32}\cdot\cos\frac{\frac{8\pi}{16}-2x}{2}=0$$

$$2\sin\frac{5\pi}{16}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0$$

$\Downarrow$

$\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0$ $\qquad x=-\frac{\pi}{4}-\pi n,\ n\in z$

$\frac{\pi}{4}-x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in z$

$-x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in z$

Ответ; $\frac{\pi}{16}+\pi k,\ k\in z$; $-\frac{\pi}{4}-\pi n,\ n\in z$.

Чистовик

№2.

Решаю через касательную.

$y = ax^2 + bx + 1$ и прямые $y = 2x + 10$, $y = 2 - 2x$

Рассмотрим 2 системы;

1) $\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + 1 = 2x_1 + 10 \\ (ax_1^2 + bx_1 + 1)' = k_1 \end{cases}$ $\begin{cases} ax_2^2 + bx_2 + 1 = 2 - 2x_2 \\ (ax_2^2 + bx_2 + 1)' = k_2 \end{cases}$

Пояснение: k_1 и k_2 — это значения производных, то есть это коэффициенты, стоящие перед переменными x_1 и x_2 в уравнении касательных к заданной параболе;

1) $2x + 10$, где $k_1 = 2$

2) $2 - 2x$, где $k_2 = -2$

Таким образом, системы примут вид;

1) $\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + 1 = 2x_1 + 10 \\ 2ax_1 + b = 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} ax_2^2 + bx_2 + 1 = 2 - 2x_2 \\ 2ax_2 + b = -2 \end{cases}$

Решу системы по-отдельности, затем представлю их решения в виде совокупности;

1) $\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + 1 - 2x_1 - 10 = 0 \\ x_1 = \frac{2-b}{2a} \end{cases}$ $\begin{cases} ax_1^2 + x_1(b-2) - 9 = 0 \\ x_1 = \frac{2-b}{2a} \end{cases}$

Подставим полученное значение x_1 в первое уравнение системы;

$$\frac{a(2-b)^2}{4a^2} + \frac{(2-b)(b-2)}{2a} = 9 \qquad \frac{(2-b)^2 - 2(2-b)^2}{4a} = \frac{9}{1}$$

$$-(2-b)^2 = 36a \Rightarrow \boxed{a = -\frac{(2-b)^2}{36}}$$ — первое значение параметра a.

2) $\begin{cases} ax_2^2 + bx_2 + 1 - 2 + 2x_2 = 0 \\ x_2 = \frac{-2-b}{2a} \end{cases}$ $\begin{cases} ax_2^2 + x_2(2+b) = 1 \\ x_2 = \frac{-2-b}{2a} \end{cases}$

Подставим x_2 в первое уравнение системы;

$$\frac{a(-2-b)^2}{4a^2} + \frac{(-2-b)(2+b)}{2a} = 1$$

Чистовик.

Продолжение задания №2.

$$\frac{(-2-b^2)^2}{4a} + \frac{-2(-2-b)^2}{4a} = 1$$

$$\frac{(-2-b)^2 - 2(-2-b)^2}{4a} = 1$$

$$-\frac{(-2-b)^2}{4a} = \frac{1}{1}$$

$$-(-2-b)^2 = 4a$$

$$\boxed{a = -\frac{(-2-b)^2}{4}}$$

Представим решения первой и второй системы в виде совокупности.

$$\left[\begin{array}{l} a = -\frac{(2-b)^2}{36} \\ a = -\frac{(-2-b)^2}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

Найдем значение параметра b;

$$+\frac{(2-b)^2}{36} = +\frac{(-2-b)^2}{4}$$

$$\frac{(2-b)^2}{36} = \frac{9(b+2)^2}{36}$$

$$4 - 4b + b^2 = 9b^2 + 36b + 36$$

$$8b^2 + 40b + 32 = 0 \quad \Big| \, 8$$

$$b^2 + 5b + 4 = 0$$

$$D = 25 - 16 = 3^2$$

$$b_1 = \frac{-3+5}{2} = -4 \quad b_2 = \frac{-5+3}{2} = -1$$

Найдём значения параметра a;

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = -1 \\ a = -\frac{(-2+1)^2}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} b = -4 \\ a = -\frac{(-2+4)^2}{4} \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = -1 \\ a = -\frac{1}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} b = -4 \\ a = -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ

Чистовик.

№ 5.

$$\begin{cases} x^3-(a+3)x^2+(3a+2)x-2a \geq 0 \\ x^3-(a+3)x^2+3ax \leq 0 \end{cases}$$

Рассмотрим второе неравенство системы:

$$x^3-(a+3)x^2+3ax \leq 0$$

Разобьём его на множители:

$$x(x^2-(a+3)x+3a) \leq 0 \quad = f(x)$$

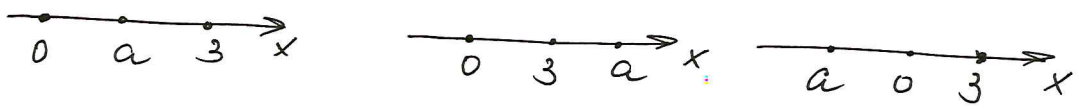
Н.ф. $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-(a+3)x+3a=0 \end{array}\right.$

$$D=(a+3)^2-12a = a^2+6a+9-12a = a^2-6a+9 = \underline{\underline{(a-3)^2}}$$

$$x_1 = \frac{a+3+a-3}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

$$x_2 = \frac{\cancel{a}+3-\cancel{a}+3}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Рассмотрим 3 случая местоположения параметра a:



$0<a<3$ $\qquad$ $a \geq 3$ $\qquad$ $a \leq 0$

1) $\begin{cases} x^3-(a+3)x^2+(3a+2)x-2a \geq 0 \\ a \geq 3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3-(a+3)x^2+(3a+2)x-2a \geq 0 \\ 0<a<3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3-(a+3)x^2+(3a+2)x-2a \geq 0 \\ a \leq 0 \end{cases}$

Ответ. $a<0$.